MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

L'objet du problème est de déterminer les endomorphismes de l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n conservant certaines propriétés de ces matrices. La première partie étudie la conservation du rang 1 et celle de l'inversibilité. Les deuxième et troisième parties, qui sont indépendantes de la première, préparent à l'étude, effectuée dans la quatrième partie, de la conservation du groupe unitaire et de celle de certaines normes.

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbf{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

$M_{p,q}(\mathbb{C})$ étant l'espace vectoriel des matrices complexes à p lignes et q colonnes, dont l'élément nul est noté 0, on pose :

- $\mathcal{E} = M_{n,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre n);
- $\mathcal{C} = M_{n,1}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices colonnes à n lignes);
- $\mathcal{L} = M_{1,n}(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices lignes à n colonnes);
- $\mathcal{C}' = \mathcal{C}\backslash\{0\}$
- $\mathcal{L}' = \mathcal{L}\backslash\{0\}$

Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$, ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{E}$, sera noté $\mathcal{G}$.

Enfin, $\mathcal{R}_1$ désignera l'ensemble des matrices de rang 1 de $\mathcal{E}$ et $\overline{\mathcal{R}}_1$ l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à 1 de $\mathcal{E}$. On a donc $\overline{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 \cup \{0\}$.

PREMIÈRE PARTIE

Pour P et Q éléments de $\mathcal{G}$, on définit deux endomorphismes $T_{P,Q}$ et $T'_{P,Q}$ de $\mathcal{E}$ par :

$$\forall A \in \mathcal{E} \qquad T_{P,Q}(A) = PAQ \qquad T'_{P,Q}(A) = P\,{}^tAQ \qquad ({}^tA \text{ est la transposée de A})$$

et on désigne par γ (resp. γ') l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) pour P et Q décrivant $\mathcal{G}$. On pose $\Gamma = \gamma \cup \gamma'$.

γ et Γ sont, de manière immédiate, des sous-groupes du groupe linéaire GL ($\mathcal{E}$). On ne demande pas de le démontrer.

A

On se propose d'établir ici que les endomorphismes T de $\mathcal{E}$ tels que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$ sont les éléments de Γ.

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

2° Établir que $\mathcal{R}_1$ est égal à l'ensemble $\mathcal{C}'\,\mathcal{L}'$ des produits XV d'un élément X de $\mathcal{C}'$ par un élément V de $\mathcal{L}'$.

3° Soient alors XV et X'V' deux éléments de $\mathcal{R}_1$. Montrer que si XV + X'V' appartient à $\overline{\mathcal{R}}_1$, alors l'un au moins des deux couples (X, X') et (V, V') est lié.

4° On désigne par Σ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathcal{E}$ inclus dans $\overline{\mathcal{R}}_1$.

Montrer que Σ est exactement constitué des éléments de l'une des deux formes suivantes :

a. $X\mathcal{L}$ (ensemble des produits XV quand V décrit $\mathcal{L}$) avec X dans $\mathcal{C}'$.

b. $\mathcal{C}V$ (ensemble des produits XV quand X décrit $\mathcal{C}$) avec V dans $\mathcal{L}'$.

X et X' étant deux éléments de $\mathcal{C}'$, préciser $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$.

X et V étant respectivement éléments de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{L}'$, préciser $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$.

5° Dans cette question et les deux suivantes, T désigne un endomorphisme de $\mathcal{E}$ tel que $T(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

Montrer que l'image par T d'un élément de Σ est un élément de Σ.

6° On suppose ici l'existence de deux éléments non colinéaires de $\mathcal{C}'$, X_1 et X_2, tels que $T(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $T(X_2\mathcal{L}) = Y_2\mathcal{L}$ avec Y_1 et Y_2 dans $\mathcal{C}'$.

a. Prouver l'existence d'une matrice Q de $\mathcal{G}$ telle que :

$$\forall V \in \mathcal{L} \qquad T(X_1V) = Y_1VQ\,.$$

b. En déduire que $T(X_1\mathcal{L}) \neq T(X_2\mathcal{L})$.

c. Montrer que pour tout V appartenant à $\mathcal{L}'$, $T(\mathcal{C}V)$ est de la forme $\mathcal{C}U$ avec U dans $\mathcal{L}'$.
Que peut-on dire de $T(X\mathcal{L})$ pour X appartenant à $\mathcal{C}'$?

d. En déduire, pour tout X dans $\mathcal{C}'$, l'existence d'un élément Y dans $\mathcal{C}'$ tel que :

$$\forall V \in \mathcal{L} \qquad T(XV) = YVQ \qquad \text{où Q est la matrice obtenue au } a\,.$$

e. Montrer que T appartient à γ.

7° Établir que si l'hypothèse du 6° n'est pas satisfaite, alors T appartient à γ'.

B

On se propose maintenant d'établir que les endomorphismes T de $\mathcal{E}$ tels que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$ sont les éléments de Γ.

1° Montrer que si T appartient à Γ alors $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$.

2° Soit A une matrice non inversible de $\mathcal{E}$ et r son rang.

a. Montrer l'existence d'une matrice M de $\mathcal{G}$ telle que pour tout élément λ de $\mathbb{C}$, $M - \lambda A$ soit inversible.
(On pourra d'abord établir la propriété pour une matrice particulière A de rang r choisie de forme simple.)

b. Montrer de même l'existence d'une matrice N de $\mathcal{G}$ telle que $N - \lambda A$ soit non inversible pour exactement r valeurs distinctes de λ.

3° On considère dans cette question un endomorphisme T de $\mathcal{E}$ tel que $T(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}$. Utiliser la question 2° pour établir, pour toute matrice A de $\mathcal{E}$:

a. Si A est non inversible alors T(A) est non inversible.

b. Le rang de T(A) est supérieur ou égal au rang de A.

Prouver alors que T conserve le rang et que T appartient à Γ.

DEUXIÈME PARTIE

On considère un espace hermitien E de dimension n, dont la norme est notée $x \longrightarrow \| x \|$ et le produit scalaire $(x, y) \longrightarrow (x \mid y)$; $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre de ses endomorphismes, $\mathcal{U}(E)$ son groupe unitaire. L'adjoint d'un élément u de $\mathcal{L}(E)$ est noté u^* ; u est dit hermitien si $u = u^*$, et hermitien positif si, de plus, ses valeurs propres sont des réels positifs ou nuls.

A

1° Vérifier que pour tout endomorphisme u de E, $u^* \circ u$ est hermitien positif, et de même rang que u.

Les n valeurs propres (distinctes ou non) de $u^* \circ u$ sont rangées en ordre décroissant $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ et on pose, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Ces nombres α_i sont appelés les valeurs singulières de l'endomorphisme u.

2° Montrer l'existence de deux bases orthonormales de E, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ telles que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ $\quad u(e_i) = \alpha_i e'_i$. (On prendra pour (e_i) une base de vecteurs propres de $u^* \circ u$).

En déduire l'existence d'un endomorphisme hermitien h de valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et d'un endomorphisme unitaire w tels que $u = w \circ h$.

3° Quelles sont les valeurs singulières d'un endomorphisme hermitien?

4° Montrer que deux endomorphismes u et v de E ont les mêmes valeurs singulières si, et seulement si, il existe w et w' unitaires tels que $u = w \circ v \circ w'$.

On dira alors que u et v sont unitairement équivalents.

B

k étant un entier compris entre 1 et n, on définit $\varphi_k : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ en posant, pour tout endomorphisme u de E, $\varphi_k(u) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les valeurs singulières de u rangées, on le rappelle, en ordre décroissant.

On définit également $\psi : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+$ par

$$\psi(u) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2)^{1/2} = (\operatorname{Tr}(u^* \circ u))^{1/2}. \quad \text{(Tr désigne la trace.)}$$

1° Montrer que ψ est une norme hermitienne sur $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{F}_k$ désignant l'ensemble des familles orthonormales $(x_1, \ldots, x_k)$ d'éléments de E, on se propose d'établir, pour tout endomorphisme u de E :

$$(1) \qquad \varphi_k(u) = \sup_{\substack{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{F}_k \\ (y_1, \ldots, y_k) \in \mathcal{F}_k}} \sum_{i=1}^{k} |(u(x_i) \mid y_i)|$$

2° Soit h hermitien positif et $(x_1, \ldots, x_k)$ un élément de $\mathcal{F}_k$.

Établir que $\sum_{i=1}^{k} (h(x_i) \mid x_i) \leqslant \varphi_k(h)$ (on pourra, par exemple, vérifier que le premier membre s'écrit $\mathrm{Tr}(p \circ h)$ où p est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \ldots, x_k)$ et exprimer cette trace dans une base convenable).

En déduire que $$\varphi_k(h) = \sup_{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{F}_k} \sum_{i=1}^{k} (h(x_i) \mid x_i)$$

3° Établir l'égalité (1) pour un endomorphisme hermitien positif, puis pour tout endomorphisme u de E.

4° Montrer que φ_k est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

C

Soit F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une norme N, et S la sphère unité de F. Un élément x de F sera dit élément extrémal de S ou S-extrémal si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i. $x \in S$

ii. $\forall (y, z) \in S^2 \quad x = \frac{1}{2}(y + z) \Rightarrow x = y = z$

Ceci équivaut à

i. $x \in S$

ii. $\forall (y, z) \in S^2, \forall \lambda \in]0, 1[\quad x = \lambda y + (1 - \lambda) z \Rightarrow x = y = z$

(On ne demande pas de vérifier cette équivalence.)

1° Montrer que si x est S-extrémal et si deux éléments y et z de F vérifient

$$x = \frac{1}{2}(y + z) \quad \text{et} \quad N(y) + N(z) = 2, \quad \text{alors} \quad y = N(y)\,x \quad \text{et} \quad z = N(z)\,x.$$

2° Établir que si N est hermitienne, tout élément de S est S-extrémal.

D

S_k désigne la sphère unité de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}(E), \varphi_k)$.

1° On écrit u appartenant à $\mathcal{L}(E)$ sous la forme $w \circ h$ obtenue au A 2°.
Montrer l'équivalence : u S_k-extrémal $\Leftrightarrow$ h S_k-extrémal.

2° Soit h un endomorphisme hermitien positif, autre qu'une homothétie, et de valeurs propres $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$.

a. En utilisant une base orthonormale dans laquelle la matrice de h est diagonale, montrer que si h est S_k-extrémal alors :

(2) $$k \neq 1 \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (1, 0, \ldots, 0).$$

b. Réciproquement, montrer que si (2) est vérifiée, h est S_k-extrémal. (On pourra d'abord montrer que si $h = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ avec u_1 et u_2 dans S_k, alors $\psi(u_1) = \psi(u_2) = 1$.)

3° On suppose maintenant que h est l'homothétie de rapport $1/k$.

a. Montrer que si h est S_k-extrémal alors $k \neq n$.

b. Réciproquement, établir que si $k \neq n$, h est S_k-extrémal.

4° Quels sont les éléments extrémaux de S_k ?

TROISIÈME PARTIE

On conserve les notations de la deuxième partie; on considère un endomorphisme t de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ (donc t élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$), tel que $t(\mathcal{U}(E)) \subset \mathcal{U}(E)$. On rappelle que $\mathcal{U}(E)$ est connexe.

On se propose de prouver que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

1° Soient u et v deux endomorphismes de E tels que, pour tout λ dans U, $\lambda u + v$ soit unitaire.

Montrer que $u^* \circ v = 0$ et que $(u^* \circ u) + (v^* \circ v) = Id_E$.

2° Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ $(p \geqslant 2)$ des endomorphismes de E tels que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in U^p$, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$ soit unitaire.

a. Montrer que pour tout (i, j) avec $i \neq j$ $u_i^* \circ u_j = 0$, et que $\sum_{i=1}^{p} u_i^* \circ u_i = Id_E$.

En déduire que $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg}(u_i) = n$. ($\operatorname{rg}(u)$ désigne le rang de u).

b. Montrer que, pour tout endomorphisme unitaire w, $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rg}(t(u_i \circ w)) = n$.

c. En déduire que, pour i donné, le rang de $t(u_i \circ w)$ reste constant lorsque w décrit $\mathcal{U}(E)$.

d. Montrer que, pour tout endomorphisme u unitairement équivalent à u_i, $\operatorname{rg}(t(u)) = \operatorname{rg}(t(u_i))$.

3° Vérifier que l'on peut trouver un entier p et des endomorphismes $u_1, \ldots, u_p$ de rang 1 tels que l'hypothèse du 2° soit satisfaite.

En déduire que l'image par t d'un endomorphisme de rang 1 est un endomorphisme de rang 1.

QUATRIÈME PARTIE

On reprend les notations de la première partie et on désigne par $\mathcal{U}$ le groupe unitaire d'ordre n, constitué des matrices A de $\mathcal{E}$ telles que $A^*A = I_n$ où A^* est l'adjointe de A.

Pour A dans $\mathcal{E}$ et k entier compris entre 1 et n, on pose :

$$\Phi_k(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k,$$

$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ désignant les racines des valeurs propres, distinctes ou non, de la matrice hermitienne positive A^*A.

D'après la deuxième partie, Φ_k est une norme sur $\mathcal{E}$.

On désigne par γ_0 (resp. γ'_0) l'ensemble des endomorphismes $T_{P,Q}$ (resp. $T'_{P,Q}$) obtenus pour P et Q décrivant $\mathcal{U}$; on pose $\Gamma_0 = \gamma_0 \cup \gamma'_0$.

1° Vérifier que si T appartient à Γ_0 alors T possède les propriétés suivantes :

$T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$

Pour tout entier k compris entre 1 et n et toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A)$.

2° En utilisant les différents résultats établis dans le problème, démontrer, pour T endomorphisme de $\mathcal{E}$, les réciproques des propriétés établies au 1°. On démontrera successivement :

a. Si $T(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ alors T appartient à Γ_0 ;

b. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_1(T(A)) = \Phi_1(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

c. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_n(T(A)) = \Phi_n(A)$, alors T est dans Γ_0 ;

d. Si pour toute matrice A de $\mathcal{E}$, $\Phi_k(T(A)) = \Phi_k(A)$ où $k \neq 1$ et $k \neq n$, alors T est dans Γ_0.